

رحلة المنطق وعلاقته بالرياضيات من أرسطو حتى رسل

بقلم: عبدالحفيظ العمري⁽¹⁾

عندما رانت أزمة أسس الرياضيات في منتصف القرن التاسع عشر قام علماء رياضيات بفحص أصول الرياضيات وسلوكها في ذلك سبلا شتى، وكان الفيلسوف برتراند رسل - مؤلف هذا الكتاب - واحداً من هؤلاء، حتى قيل عنه أنه "أعظم الباحثين في - أو عن - أصول الرياضيات، وأعظم المناطق في القرن العشرين وفي تاريخ الفكر الإنساني برمته"، وذلك من خلال كتابه (أصول الرياضيات) أو برنكبيا ماتيما تيكا **Principia Mathematica** - الذي كتبه مع الفيلسوف ألفرد وايتهيد - هذا الكتاب الذي ينبغي أن يُعد من المعالم البارزة للقرن العشرين.

إذن نحن أمام منطق ورياضيات؛ فلا بد لنا أن نعرف العلاقة بينهما، ولماذا البحث عن أصول الرياضيات.

إرهاصات المنطق الأرسطي

المنطق ربيب الإغريق الذين ازدهرت حضارتهم منذ ما يقرب من 2500 سنة مضت، وتوسعت حتى وصلت لذروتها في أثينا في منتصف القرن الخامس قبل الميلاد، وشملت مدناً في مناطق خارج اليونان أمثال أيونيا ومالطة وإفسوس في آسيا الصغرى والإسكندرية في مصر، وإيليا في جنوب الساحل الإيطالي. الاستقرار الذي نعمت به اليونان وحبهم للتفاصيل صنع حضارة دأبت على تمجيد النظر وفي نفس الوقت تحقير العمل اليدوي، فليس غريباً أن يلد للتفكير الخالص علم المنطق، الذي يمكن تعريفه ببساطة أنه علم يدرس قوانين التفكير الأساسية، بصرف النظر عن مادة هذا التفكير أو موضوعه فهو معنيٌّ بصحة الاستدلال وسلامة الانتقال من المقدمات إلى النتائج، ولا شأن له بالحكم بانطباقها أو عدم انطباقها على الواقع، إنه معنيٌّ بالصحة وليس بالصدق، فالصحة أو البطلان خاصة للاستدلال.

طبعاً أكثر ما يُنسب ابتكار المنطق لأرسطو (384 - 322 ق.م)؛ تقول د. يمني طريف الخولي: "المنطق الذي خلقه أرسطو خلقاً مما يشبه العدم!"

الواقع أن أرسطو قد جنا ثمرة من سبقه من الفلاسفة الذين مهدوا له الطريق لابتكار قواعد المنطق القديم كاملة؛ فيمكننا اعتبار زينون الإيلي (490 - 430 ق.م) بالإضافة إلى كلٍّ من سقراط (469 - 399 ق.م) وأفلاطون (427 - 347 ق.م) مبشرين بظهور المنطق؛ فزينون الإيلي قدّم واحدة من المفارقات الرياضية والفلسفية معاً حول المالا نهاية والتي تقودنا إلى أن الطبيعة الأساسية للحركة تجعلها (الحركة) مستحيلة والتي تُعرف بمفارقة أخيل والسلحفاة⁽²⁾!

وقد وضع هذه المفارقة انتصاراً لمبدأ استاذة بارمينيدس **Parmenides** (515 - 440 ق.م) أن التغير وهم!

بالمناسبة قد أعتبر رسل أن بارمينيدس هو مستكشف المنطق!

أما سقراط؛ فمعه بدأت الفلسفة الحقّة بوضعه منهجاً مبتكراً للتفكير يُعرف بالمنهج التهكمي أو التوليدي، والذي من خلاله يضبط المفاهيم ويعري المغالطات المبنية على التناقض، يعد الحرص على عدم الوقوع في هذا الأخير المبدأ الأساسي لكل عملية منطقية، في حين قدم أفلاطون نظرية المُثل Ideas (وأحياناً تُسمّى الصور Form)؛ حيث رأى أن

(1) الكاتب العلمي والمحاضر بجامعة العلوم والتكنولوجيا باب- اليمن.

(2) مجرد فكرة نظرية حول السباق بين أخيل والسلحفاة، أخيل سريع العدو، هو أحد أبطال إلياذة هوميروس، والسلحفاة معروفة ببطئها الشديد في السير.

في بداية السباق، السلحفاة تتقدم عن أخيل بمسافة ما، وهذا عدل. لكي يلحق أخيل بالسلحفاة، عليه أن يصل إلى المكان الذي كانت توجد فيه السلحفاة في بداية السباق. فتكون السلحفاة قد سبقته بمسافة أخرى.

لكي يلحق أخيل بالسلحفاة في المسافة الثانية، تكون قد سبقته بمسافة ثالثة. وهكذا إلى ما لانهاية. أي أن أخيل لن يلحق بالسلحفاة مهما كانت سرعته بالنسبة لسرعة السلحفاة. وأيضاً يمكننا حل هذه المشكلة باستخدام المتواليات الهندسية اللانهائية.

المواد التي ضمن حواسنا ما هي إلا أشياء مقلدة عن مثالها الأسمى في عالم الحقيقة الذي لا يُدرك، فالصورة الجميلة ما هي إلا تقليد لمثال الجمال ذاته وهذه المُثل لا تُدرك إلا بالعقل.

وعرض أفلاطون مثالاً لتقريب ذلك إلى الأذهان في تشبيه الكهف؛ فقد تخيل أننا سجناء في كهف لا نرى إلا ظلال الأشياء المنعكسة على بوابة الكهف فنظننا الأشياء نفسها، لكن أحد المسجونين يهرب من الكهف، فيكتشف أن الأشياء في الخارج هي الحقيقية وما نراه في بوابة الكهف ما هو إلا ظلالها.

أطلق على عالم الحقيقة التي فيها هذه الصور اسم اللوجوس Logos، وهذه الكلمة اشتق منها لفظة المنطق logic وكذلك المقطع logy الذي يُضاف إلى الكلمة ليفيد معنى العلم مثل علم الحياة Biology وعلم الكونيات Cosmology وعلم المعادن Mineralogy... إلخ.

أفكار أفلاطون عن الصور سنجد أثرها في الرياضيات لاحقاً.

ولو عدنا لأرسطو لوجدنا أنه لم يُطلق على المنطق هذا الاسم، بل سماه العلم التحليلي أو التحليلات في كتابه الجامع لعمله في المنطق والمُسَمَّى بالأورجانون organon، أي الأداة أو آلة التفكير، وكان الإسكندر الأفروديسي في القرن الثاني الميلادي أول من استخدم مصطلح Logic .

المنطق الأرسطي أو الصوري

إذا كانت تلك هي الارهاصات، فإن علم المنطق الصوري نشأ ناضجاً مكتملاً في القرن الرابع والثالث قبل الميلاد على يد المعلم الأول أرسطو أعظم فلاسفة الإغريق، منقسماً إلى نوعين؛ الأول: المنطق الصغير Logica minor وهو دراسة قوانين الفكر مجردة من كل مضمون ويبحثها أرسطو حين يتكلم عن القياس كما في التحليلات الأولى وهو المتعارف عليه باسم المنطق الصوري، أما الثاني: المنطق الكبير Logica major وهو ما ينطبق على مناهج البحث ويقصد به دراسة عمليات العقل منطبقة على هذا العلم، أو ذاك كما في كتاب (التحليلات الثانية)، وهو يتكلم عن القياس مطبقاً على البرهان، صحيح أنه لم يهمل الناحية المادية لكن الذي تغلب هو الناحية الصورية فُعرف منطق أرسطو باسم المنطق الصوري.

ويدرس المنطق الصوري ثلاث مباحث رئيسية وهي: مبحث الحدود والتصورات (الحد والتصور، المفهوم والماصدق...)، ومبحث القضايا (التركيبية والتحليلية، وكذلك قضية كلية أو جزئية) ومبحث الاستدلالات (الاستدلال بنوعيه؛ المباشر وغير مباشر المتمثل في القياس). كما وضع أرسطو مبادئ أولية للوجود والفكر وهي الهوية وعدم التناقض والثالث المرفوع أو الوسط الممتنع؛ وهذا المبدأ الأخير هو حيز الزاوية في علم المنطق، فالوسط الممتنع معناه أن القضية لا بد أن تكون صائبة أو خاطئة، وليس الاثنين معاً.

اعتبر أرسطو أن التفكير عن طريق القياس هو النموذج النمطي المكتمل للمنطق؛ ويتكون من مقدمتين ونتيجة. ويُسمَّى المنهج الاستنباطي الخالص، أي منهج استنتاج النتائج من المقدمات المطروحة اعتماداً على قوانين العقل والمنطق فقط دون تجربة!

ولعل المثل الذي استخدمه لا يزال عالماً في الأذهان:

"كل الناس فانون... (مقدمة)

سقراط إنسان... (مقدمة)

إذن سقراط فان... (نتيجة)".

وكان للرواقيين الذين جاءوا بعد أرسطو في العصر الهيليني المساهمة في إضافة أفكار على هذا المنطق الصوري، فالفيلسوف كريسيبوس (281-205 ق.م) اضطلع بوضع القواعد الملائمة لمعالجة ما نسميه الآن بالدوال المنطقية "و"، "أو"، "ليس"، التي هي أدوات ربط بين القضايا، وقد سُميت دوالاً لأنها تقوم بما تقوم به الدوال في الرياضيات من تلحق شيئاً محدداً تماماً بشيء واحد أو عدة أشياء معطاة، التي هي هنا القضايا.

وكذلك فكرة الاستنباط المنطقي أو اللزوم، على غرار "إذا كان أ، فإن ب" أي التي تسير من الفروض إلى الاستنتاجات، وغيرها من القواعد.

لكن تعرض نصيب كبير من أفكار الرواقين للإهمال أو سوء الفهم لفترة طويلة بسبب الفهم المشوب بالنقصان في العصور الوسطى، وتم بخسها لحساب أعمال أرسطو وشرّاحه.

قد يُثار سؤال: لماذا يُسمّى منطقاً صورياً؟

أي صورة بغير مضمون!

كان الفيلسوف كانط أول من استعمل مصطلح الصوري Formal كصفة لمنطق أرسطو.

لكن لماذا؟

لأن هذا المنطق معنيّ بصورة التفكير أو الفكر وهيكله وقالبه وإطاره العام، وليس بمضمونه الإخباري ومحتواه المعرفي؛ فهو معنيّ بصحة الاستدلال وسلامة الانتقال من المقدمات إلى النتائج، ولا شأن له بالحكم بانطباقها أو عدم انطباقها على الواقع، إنه معنيّ بالصحة وليس بالصدق، فالصحة أو البطلان خاصة للاستدلال، أما الصدق أو الكذب فمجرد خاصة للقضية .

هذه الصورية لدى المنطق الأرسطي (أي يُعنى بصورة الكلام دون مادته ومعناه) قد وجدت لها مجالين للتطبيق أحدهما الرياضيات والمجال الآخر في الكلمات أو العبارات اللفظية التي نعبّر بها عن عملية التفكير، والمنطق يتأرجح دائماً بين هذين المجالين؛ رغم أن المجال الثاني هو صانع الفخاخ المتربصة بالمنطق بفعل غموض الكلمات أو نقصان المعرفة بالأشياء، وهذه الفخاخ سُميت بالمفارقات، ولعل مفارقة أخيل والسلحفاة – السالفة الذكر – واحدة منها.

الرياضيات والمنطق الصوري

توسع الإغريق في حملاتهم العسكرية في الشرق خصوصاً، حيث وصل جيوشهم إلى الهند مروراً بمصر وفارس، لذا قد استفادوا من الفكر الشرقي القديم بصفة عامة والحضارتين المصرية والبابلية بصفة خاصة، ومن شعوب الشرق الأخرى، في نقل العلوم التي كانت لديهم، ومنها الرياضيات، لكنهم قاموا بتطويرها، فظهرت عندهم مفاهيم أساسية يقوم عليها البناء الرياضي النظري لم تكن موجودة من قبل، كما استعملوا طرقاً جديدة في التفكير كالتجريد والتعميم والتحليل؛ وما مبرهنة فيثاغورث الشهيرة⁽¹⁾ وآراء طاليس في الهندسة⁽²⁾ إلا نماذج لذلك، تلك الإرهاسات التي مهدت الطريق لإقليدس الإسكندري (360-295 ق.م) لإقامة نسقه الهندسي مطبقاً التحليل الأرسطي؛ فأصبح موضوع الرياضيات ماهيات ذهنية مجردة لها وجودها الموضوعي الكامل، تؤسس لعلم نظري اكتملت شروطه بعد أن صاغ له إقليدس منهجه في كتابه (الأصول)، ونجد أثر منطق أرسطو الصوري في كتابه، حيث المبادئ الخاصة بالرياضيات هي التعريفات والبدهيّات والمسلمات⁽³⁾، فإذا كان أفلاطون يقرُّ بعالم المثل ويعتبر العالم الحسي عالماً زائفاً، فإن أرسطو يقرُّ بالعكس تماماً، وبالنسبة للرياضيات عند أرسطو فهي علم برهاني يحتاج لقيامه إلى أسس ومبادئ عامة ننطلق منها للبرهنة على جملة من القضايا والنظريات للوصول إلى نتائج يقينية، هذه المبادئ التي قدمها إقليدس اعتُبرت أنموذجاً للنظرية الاستنتاجية لا يتجاوز، بل يصعب حتى مضاهاته... حُرِّص على اختيارها بحيث لا يساور العقل السليم أي شك في شأنها. وعلى الرغم من أن كل ما تثبته هو صادق من الناحية الخبرية (أو التجريبية) فإن التجربة لا تُستدعى لتقدم تبريراً؛ إذ لا يعمل عالم الهندسة إلا وفق الطريقة البرهانية... مع الامتثال لقوانين المنطق وحدها.

إنه المنطق مرة أخرى حتى أننا نجد أنه في اللحظة التي ولد فيها المنطق ولدت الرياضيات؛ لأنها لم تعد مقتصرة على تبيان أن خاصية ما تصدق على مثال ما أو شكل ما، باتت الآن قادرة على إثباتها عن طريق العقل فقط. لقد وضع إقليدس أول نسق هندسي استنباطي سار جنباً إلى جنب مع المنطق الأرسطي لأكثر من ألفي عام.

هيمنة منطق أرسطو في القرون الوسطى

(1) مبرهنة فيثاغورث: في المثلث القائم الزاوية يكون مربع الوتر مساوي لمجموع مربعي الضلعين الآخرين.

(2) نظرية التوازي المشهورة في المثلثات منسوبة له.

(3) التعريفات: وهي جملة من الحدود التي تعبر عن جوهر الأشياء وماهيتها وتهدف إلى الوصول لأقصى درجات الوضوح. من بينها: النقطة ليس لها بعد! البدهيّات: وهي القضايا الواضحة بذاتها نقيضها بدون البرهنة عليها مثل: الكل أكبر من الجزء.

المسلمات: وهي قضايا غير واضحة بذاتها، ولكن الرياضي يطلب منا التسليم بها دون برهان مع وعد منه بأنه سيشيد عليها بنياناً رياضياً متماسكاً. مثل المسلمة الخامسة في التوازي التي سنتحدث عنها لاحقاً.

جاءت العصور الوسطى ودخلت أوروبا في سبات حضاري عميق امتد من سقوط الإمبراطورية الرومانية (تقريبًا في القرن الخامس الميلادي) حتى القرن السادس عشر الميلادي، هذه الفترة كان القياس الأرسطي هو المهيمن وذلك لأن الكتب المنزلة زاخرة بحقائق مُسلمً بصحتها، قضايا كلية لا جدال في يقينها، يمكن أن تُوضع كمقدمات لنخرج بالجزئيات المترتبة عليها والمتضمنة فيها، أي نتوصل إلى النتائج الضرورية الصديق بواسطة القياس الأرسطي، واحتل أرسطو في تاريخ الفكر منزلة لم يحتلها فيلسوف من قبل ولا من بعد، ولا ننسى أن الفلسفة التي بدأت عند اليونان في البحث عن أصل الكون قد أنزلها سقراط من عرشها ووجهها للبحث عن الإنسان بعبارته المشهورة "اعرف نفسك"، ومن جاء بعده لم يعودوا للبحث عن الطبيعة، بل ذهبوا مسالك شتى، ثم كانت قبضة الكنيسة القوية في عصور الظلام التي تمسك مفكروها بأورجانون أرسطو، وأقروه منهجًا وحيدًا للفكر لا بد أن يلتزم به أي مفكر وإلا كان خارجًا عن تعاليم المسيحية-ولو استطاع بعض الفلاسفة المسيحية التوفيق بين فلسفة أرسطو وتعاليم الدين المسيحي- كل هذا دفع لتكريس مواهب العقول لخدمة اللاهوت، فلم يعد يرى المفكرون في الطبيعة ألا أنها صنعة الخالق، والتساؤل عنها وعن العالم المادي بمعزل عن الرب بدا لرجال ذلك العصر هراء لا طائل من ورائه.

هكذا تراجع السؤال عن الطبيعة في حد ذاتها إلى أقصى الحدود، إن لم يتوارَ نهائيًا، فلا يعود ثمة احتياج لمناهج تجريبية تنصب عليها، وبالتالي ينفرد القياس الأرسطي بميدان البحث ليبدأ من يقين وينتهي إلى يقين!

ماذا عن العالم الإسلامي في تلك الحقبة؟

تُرجمت كتب أرسطو، في أواسط القرن التاسع الميلادي/الثالث الهجري، وراجعها على الأصل اليوناني ونقحها وهذبها الجيل الثاني من المترجمين وعلى رأسهم حنين بن إسحق وولده إسحق بن حنين، وترجموا أيضًا شروحًا وتعليقات، ولعل أشهر الذين اشتغلوا على ذلك فيلسوف قرطبة ابن رشد الحفيد (520 - 595هـ) الشارح الأكبر لأعمال أرسطو.

لقد أصبح المنطق الأرسطي مطروحًا بوضوح في الحضارة الإسلامية، فتأثر به علماء الشريعة والفقه. وها هو الإمام الغزالي (450 - 505هـ) يحدد المنطق قائلاً: "بأنه القانون الذي يميز صحيح الحد والقياس عن غيره، فيتميّز به العلم اليقيني عما ليس يقينًا، وكأنه الميزان، أو المعيار للعلوم كلها".

ونجد أثر المنطق في الفقه والنحو وغيره، فقد كان القياس هو الاستدلال العمدة في العصور الوسطى الأوروبية والإسلامية على السواء، رغم وجود من نقده من الفقهاء المسلمين وعلى رأسهم ابن تيمية (٦٦١-٧٢٨هـ) صاحب (نقض المنطق)، و(الرد على المنطقيين) قد شنوا حملة شعواء على أرسطو ومنطقه.

المنطق في العصور الوسطى

في العصور الوسطى دارت أفكار المنطق لاهوتية حتى يبدو المنطق الملائم أقل وضوحًا من الرياضيات الملائمة، لأنه فشل مرارًا وتكرارًا في إبلاغ رسالته، وجرى توظيفه في معالجة موضوعات ضبابية مستغلقة: الطبيعة والآلهة، مثل برهان وجود الله للقديس أنسيلم (1033-1109م)؛ حيث يدل على ذلك بقوله: "حتى هذا الأحق، لا يتصور في ذهنه موجودًا أعظم من الله، لأن الشيء الذي لا نتصور وجود أعظم منه، لا يمكن أن يوجد في الذهن فقط. لو كان موجودًا في الذهن فقط، لأمكننا أن نفكر في أنه موجد في الواقع أيضًا، وهذا وجود أعظم، لماذا؟ لأن الشيء الموجود في العقل وموجود في الواقع، أعظم من الشيء الموجود في الخيال فقط.

في هذه الحالة، يكون الموجود الذي لا نستطيع أن نتصور أعظم منه، هو نفسه ما نستطيع أن نتصور أعظم منه، وهذا تناقض. وبذلك، يكون ما لا نستطيع أن نتصور أعظم منه، يوجد في الذهن والواقع أيضًا. إذن الله موجود".

ونلاحظ أن هذا منطق قائم على اللغة والتلاعب بها، وهذا ما سنجده توضيحه في نظريتي الأوصاف والأنماط المنطقيتين لدى رسل.

وقبل أن نغادر العصور الوسطى نعرض لواحدة من أعرق مشكلات الفلسفة التي تتوغل في أعماق الميتافيزيقا، حول طبيعة الكليات⁽¹⁾ universals، التي كانت خاضعة للتأثير المشترك لأفلاطون وأرسطو وهي المناظرة بين

(1) الكليات أسماء مولدة من قبيل "إنسان"، "حيوان"، "روح"... إلخ

الاسمية والواقعية؛ فالمثل (أو الصور) عند أفلاطون لدى مؤيدي الواقعية Realism واقعية، بل أكثر واقعية من الواقع المادي ويعتقد المدرسيون (فلاسفة القرون الوسطى) أن الرب يدركها ليكون لها كل الخلود والأبدية، أما النظرية المعارضة الأسمية Nominalism ترى أن المفاهيم العامة لا تعدوا أن تكون تعبيرات رنانة تطلقها الأفواه عندما تطلق الكلمات؛ بتعبير الفيلسوف رسلينو (1050-1120م) الكلّيات مجرد إطلاق أصوات، وشايعه الفيلسوف ووليام أوكام (1280-1349م) صاحب نصل أوكام القائل: "يجب عدم زيادة عدد الكيانات بلا حاجة"، وفي المنطق لا تكثر من عدد البديهيّات واستبعد أي زيادات.

سيستخدم رسل نصل أوكام لاحقًا في المنطق الرياضي.

ونعرج كذلك على الفيلسوف المدرسي بيتر أبيلارد (1079 - 1142م) الذي صاغ قاعدة الإثبات أو الوضع، رغم أن القدامى قد استخدموها دون أن يسموها منذ استخدمها إقليدس استخدامًا منهجيًا ليثبت مبرهنات جديدة دون أن يعود مجددًا إلى البديهيّات أو المسلمات الأولية، وهكذا في المنطق: يمكن البدء، في منتصف الحجة، من قضية مثبتة قبلاً، من دون أن يكون لزامًا تبرير كيفية إثباتها.

رياضيات القرون الوسطى

حينما كان الظلام يحرق بأوروبا كانت الحضارة الإسلامية في قمة ازدهارها العلمي، حيث شهدت تطويرًا في شتى العلوم ونخص بالذكر العلم الرياضي، فقد ظهرت العديد من الاكتشافات الرياضية، على يد المسلمين، والتي أثرت فيما بعد على تطور العلم الرياضي لدى الغرب، لعل أهمها اختراع الجبر Algebra في منتصف القرن التاسع الميلادي، إذ تتجلى العبقرية الإسلامية في الجبر، فالجبر عنوان صحيح وصادق للحضارة الإسلامية وهو وصف لتلك العقلية. وكذلك استخدام الأرقام العربية المستعملة اليوم، وإدخال فكرة الصفر، وتبع ذلك اختراع الأعداد السالبة، كل هذا أدى لتقدم علم لحساب، ومن ذلك ربط الحساب بالجبر بما عُرف بحسبنة الجبر أي: التخلي عن البراهين الهندسية وتعويضها بالجبرية.

ومهد الطريق أيضًا لربط الجبر بالهندسة كما سنجد ذلك لاحقًا عند ديكارت (وما عرفت بهندسة الجبر)، ومن بعد ذلك ظهور التفاضل والتكامل.

إن فكرة الجبر في حد ذاتها سنجدها لاحقًا في المنطق الرمزي أو الحديث.

التامل من منطق أرسطو مع بكون والمنهج الاستقرائي

بدأت الكشوف العلمية في منتصف القرن السادس عشر ثم واصلت النهضة العلمية طريقها وكان قد اقترنت حركة العلم الحديث بالثورة على المنطق الأرسطي وقياساته العقيمة، وسلوك الطريق المضاد تمامًا وهو طريق الاستقراء التجريبي، وكان الفيلسوف الإنجليزي فرنسيس بيكون (1561-1626م) قد عرض له في كتابه (الأورجانون الجديد Novum Organon) الصغير الحجم والذائع الصيت الذي نشره عام 1620م، والعنوان يعرض إشارة واضحة إلى أن أورجانون أرسطو قد أصبح أداة قديمة بالية عفا عليها الدهر.

لقد شارك بيكون رجال عصره في رفضهم الضاري للمنطق الأرسطي، وكان من أعنفهم هجومًا على القياس وعقمه، وحتى الاستقراء الأرسطي، لم ينجُ من نقد بيكون الحاد ومحاولاته لإثبات اهترائه وتهافته، لأن العصر عاد لسؤال الطبيعة وليس لتوضيح اللاهوت كما كان سائدًا في العصور الوسطى، فتراجع المنطق الصوري لأنه لا يصلح لاكتشاف الطبيعة المتأججة وتنحصر معاملاته في الصحائف والأوراق، وأنه بحكم طبيعته لا يقبل تطويرًا، بل إنه عائق دون استقبال العصر الحديث والعالم الحديث.

لقد هيمنت الروح التجريبية بوصفها روح العصر ومنهج البحث، وتراجع المنطق إلى زوايا الإهمال والجمود لما يقرب من خمسمائة عام.

ما هو المنهج الاستقرائي؟

يمكن أن نلخصه أنه "عملية الاستنتاج التي يبدأ بها الشخص من تجارب معينة، ويتقدم نحو التعميمات"، أي الانتقال من الجزئي إلى الكلي مستندًا على التجربة التي هي حجر الأساس.

ديكارت والهندسة التحليلية، ليبنتز واللغة العالمية، كانط وقبليته

بدأت الفلسفة الحديثة بفرنسيس بيكون حيث بلور الروح العلمية في المنهج التجريبي وأن مصدر المعرفة هو الانصبات لشهادة الحواس التجريبية ورفض الميتافيزيقا، وجاء معاصروه وخلفاؤه في القارة الأوروبية للبحث عن مصدر المعرفة؛ والتقط الشعلة منه الفيلسوف الفرنسي رينيه ديكارت (1596-1650م) الذي رأى أن العلم ينبغي أن يستند على فكرة الكم لا الكيف، وأوضحه للعلم الكمي هو الرياضيات، وقرر أنها هي المنطق الحقيقي للعقل، والطبيعة محكومة بقوانين لها الصورة الرياضية – كما سينادي جاليليو بعد ذلك.

قال ديكارت: "تعجبني الرياضيات على الخصوص، وذلك لما في براهينها من الوثاقة والوضوح، ولكني لم ألاحظ فائدتها الحقيقية إلا في الصناعات الميكانيكية، فعجبت لأمرها، فمع أن أسسها ثابتة وممتينة لكن لم يبنَ عليها بناء أسمى".
لقد قام ديكارت - كما قال هيدجر -: بترييض الفكر!

فديكارت إلى جانب كونه فيلسوفًا فقد كان رياضياً؛ فهو صاحب الهندسة التحليلية الرابطة بين الجبر والهندسة. أما ليبنتز (1646-1716م) فقد رأى بأن أحسن المناهج وأوثقها هي مناهج الجبر، لأن الأخيرة ترمز إلى الفكرة بواسطة رموز ثابتة تعبر عنها تعبيرًا واضحًا، والمعادلات الجبرية بهذا الشكل تثير انتباهنا وتجعلنا في فطنة وبقظة، وكما ساعدنا الجبر في فهمنا للهندسة كذلك يمكننا أن نتخذ للتعبير عن أفكارنا، فيمكننا أن نرمز للفكرة البسيطة وكذلك الفكرة المركبة برموز معين كرموز الجبر، من هنا طمح ليبنتز في إيجاد لغة غير طبيعية تكون موحدة على غرار لغة الرياضيات الرمزية، إذ لم يرد ليبنتز أن يجعل المنطق فرعًا من الرياضيات وإنما أراد إقامة حساب منطقي *Calculus* أي منطق لغته الرموز وقوامه معادلات وقوانين، لكن لا تنطوي المعادلات والقوانين على علاقات كمية، بل على علاقات غير كمية.

وهذا ما حاول تجسيده بمشروعه الضخم الذي جعل عنوانه اللغة المتميزة الكلية (العالمية)، إلا أن مشروعه باء بالفشل وذلك لعدم تخلصه من قبضة المنطق الأرسطي، بل لقد أبدى إعجابه به حيث يقول: "إن ابتكار القياس يعد من أجمل إبداعات الفكر الإنساني وأكثر أهمية، فهي نوع من الرياضيات الكلية (الشاملة) التي لم تُعرف وتقدر أهميتها على النحو الكافي، ويمكن القول إنها تمثل فن العصمة من الزلل شرط أن نحسن استخدامها".

هذا جعل منه الأب المؤسس للمنطق الحديث والمعاصر الذي نشأ بعد قرنين، أو بالأصح المبشر الأول، تبعه في القرن الثامن عشر مبشرون آخرون من علماء الرياضيات المعنيين بالمنطق.
ولا ننسى أن ليبنتز هو المؤسس الشريك مع العالم إسحق نيوتن (1642-1727م) – كلاً على حده - لحساب التفاضل والتكامل.

من نافلة القول إن أعمال ليبنتز قد أثرت في رسل الذي تولى تدريسها في كامبردج لمدة عام، ثم أصدر كتابه (عرض نقدي لفلسفة ليبنتز) عام ١٩٠٠م الذي حمل فيه على المنطق الأرسطي والميتافيزيقا؛ فكان هذا الكتاب علامة فارقة في مستهل طريق فلسفة القرن العشرين وتوجهها صوب المنطق الرياضي وتعلمها أنه صلب الفلسفة، فلا بد وأن تكون منطقية.

كانت التجريبية الإنجليزية قد بلغت ذروتها مع ديفيد هيوم (١٧١١-١٧٦٦م) الذي قام بالتمييز بين نوعين من المعرفة: النوع الأول هو المعارف المنطقية والرياضية، أي القضايا التحليلية التي تقتصر على تحليل الأفكار الذهنية لتحديد ما بينها من علاقات لزومية استنباطية.

أما النوع الثاني فهو المعرفة المتعلقة بالإخبار عن الواقع كما تفعل العلوم الطبيعية، أي القضايا التركيبية، وهذه لا مصدر لها إلا انطباعات الحس ومعطيات التجريب.

إن القضايا التحليلية لا تقدم معلومات جديدة عن العالم الذي نعيش فيه، إنما معلومات عن معنى الكلمات فقط. وحدها القضايا التركيبية هي تصف الحقيقة، أي أن المعرفة الحققة لهذا العالم الذي نعيش فيه، يجب أن تعتمد على المشاهدة والتجربة فقط، وما سوى هاتين القضيتين لغو.

جاء من بعده الفيلسوف الألماني إيمانويل كانط (1724-1804م) الذي اتخذ موقفًا وسطًا بين مغالاة العقلانية (الديكارتية) التي ترد المعرفة إلى العقل وحده، وتطرف النزعة التجريبية لدى هيوم التي تردها إلى أساس واقعي تجريبي، حيث رد على هيوم في أن هناك بعض القضايا التركيبية، هي أيضًا لا تتطلب خبرة سابقة (Priori)، من ذلك قضايا الرياضيات والهندسة كمبرهنة فيثاغورث التي تعتمد على تطابق المثلثات وهكذا نصل إلى البديهيات التي لا تحتاج إلى برهان، فتكون قضايا الرياضة قَبْلِيَّة — أي قبل الخبرة الحسية وسابقة عليها.

أراد كانط أن يبين أن هندسة إقليدس هي الهندسة الوحيدة والضرورية من حيث أنها معبرة عن خواص المكان المعطى لنا في حدسنا وفكرنا، لأن المكان والزمان لديه حدسان قَبْلِيَّان. ولديه أن كل قضايا الرياضيات تركيبيّة، في حين قضايا المنطق تحليلية، ويرى أن المنطق الصوري الذي وضعه أرسطو جاء كاملاً وكل ما قام به المناطق بعده مجرد تحسين وتنسيق لا إضافة نظرية جديدة ولا تصحيح أخطاء.

منطق ستيوارت مل

سنعبر سريعاً الفلسفات التي تلت كانط، لأن المقام ليس عرض تاريخ الفلسفة⁽¹⁾، ونلخص الأمر أن النزعة التجريبية كانت هي السائدة منذ صاغها بيكون في القرن السادس عشر، قد استلمتها الفلسفة الوضعية المؤمنة بما هو موضوع Posited أمامنا في العالم الواقعي التجريبي، ورفض أية استنتاجات فلسفية أو ميتافيزيقية تتجاوز هذه الحدود، انطلاقاً من رفض كل ما لا يتحقق تجريبياً، ليأتي تطرف الاستقرائية التجريبية على يد جون ستيوارت مل (1803-1873م) الذي حاول صياغة الاستقراء كمنهج ومذهب بما عُرف بالنزعة الاستقرائية، التي بلغت من التطرف بالتجريبية لحد النظر إلى كل مكونات الذهن ومحتوياته مجرد تعميمات استقرائية، لا يُستثنى من ذلك شيء البتة، حتى قوانين الرياضيات $2 + 2 = 4$ ، وقوانين الفكر الصورية مثلاً "أ هو أ" ... كلها ليست إلا تعميمات استقرائية لكثرة ما لاحظته حواسنا من أن اقتران ٢ و ٢ ينتج عنه دائماً ٤، ومن أن أ هي دائماً أ، فالاستقراء هو منطق العلم والتفكير والحياة! رفض مل المنطق الصوري الذي سماه منطق النتيجة، في حين سمى منطقاً منطق الحقيقة. وقد جمع أفكاره في كتابه (نسق المنطق) الصادر عام ١٨٤٣م محاولاً تحقيق حلمه بأن يكون نبي الاستقراء مثلما كان أرسطو نبي القياس.

الطريق إلى المنطق الرمزي/الحديث

كانت النزعة الاستقرائية المتطرفة قد لفتت النظر إلى الرياضيات، التي تُعد علمًا صوريًا غير مُستقى من واقع تجريبي، لكنها أداة رئيسية يمين العلوم التجريبية الإخبارية؛ فإن هذه الإجابة التجريبية المتطرفة لم تقنع علماء الرياضيات، لذا نهض فريق منهم لفحص أصول الرياضيات من الطريق المخالف لهذه الاستقرائية، أي طريق العقل المنطقي الخالص.

ولم يكن هذا هو السبب الوحيد، بل إن النمو الذي شهدته الرياضيات منذ ربط الجبر بالهندسة على يد ديكارت؛ فراحت الرياضيات – التي أصبح الجبر عمودها الفقري - تحلق في آفاق رحبة من التجريد وتشديد صروحاً ذهنية تزداد بُعْداً عن العالم الحسي (وما الأعداد التخيلية إلا نموذجاً)، وما جاء به خلفاؤه أمثال نيوتن وليبنتز في تروض المالا نهاية وظهور أنواع جديدة من الدوال وغيرها مما تزخر به كتب تاريخ الرياضيات. كل هذه التطورات والنمو أنتج تناقضات في مختلف فروع الرياضيات، تلك التناقضات تمت بلورتها بما عُرف بأزمة الأسس، وهذا ما دعا إلى إعادة النظر في الأسس التي يجب الانطلاق منها لتأسيس رياضيات متناسقة غير متناقضة.

أزمة الأسس في الرياضيات

شهد منتصف القرن التاسع عشر وأوائل القرن العشرين تناقضات أفرزتها معطيات الرياضيات الحديثة بما عُرف بأزمة الأسس، منها:

1- المسلمة الخامسة وظهور الهندسة اللاإقليدية

كان إقليدس قد بنى كتابه (الأصول) على بديهيات ومسلمات وتعريفات، لكن في منتصف القرن التاسع عشر بدأ التساؤل عن صحة المسلمة الخامسة التي أوردها إقليدس في كتابه والقائلة: "من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم واحد يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم".

(1) لم نعرض لمنطق هيجل، أو لجدل هيجل (الديالكتيك Dialectic) لأنه لا علاقة لها بالرياضيات وأيضاً كون رسل اعتبره هراء!

هذه الشكوك بدأها الرياضي الألماني فردريك جاووس (1777- 1855م) حول المسلمة الخامسة، التي حاول من سبقوه استنباطها من المسلمات الأخرى، هذه الشكوك والانتقادات قادت إلى اكتشاف نوعين من الهندسة يُطلق عليهما الهندسة اللاإقليدية؛ وهما الهندسة الزائدية أو هندسة لوباتشيفسكي نسبة لمكتشفها عالم الرياضيات الروسي نيكولاي لوباتشيفسكي (1792- 1856م) عام 1830م، وفيها تُستبدل بمسلمة التوازي المسلمة التالية: "من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم يمكن رسم أكثر من مستقيم يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم".

والثانية هي الهندسة الناقصية أو هندسة ريمان التي قدمها عالم الرياضيات الألماني جورج ريمان (1826- 1866م) عام 1854م؛ وفيها تُستبدل فيها بمسلمة التوازي المسلمة التالية: "من نقطة لا تقع على مستقيم معلوم لا يمكن رسم مستقيم لا يقطع المستقيم المعلوم". بعبارة أخرى المستقيمتان المتوازيتان لا وجود لهما في الهندسة الناقصية.

وهكذا تراجع التطابق بين المكان والزمان الذي في أذهاننا – كما قال كانط - وبين الواقع. هكذا بات يُنظر إلى المسلمات والبديهيات – كليهما- على أنها حقائق محتملة فقط، تستحق الاستكشاف من أجل خصوبة معقباتها المنطقية.

الجدير بالذكر أن الهندسة اللاإقليدية وجدت لها تطبيقاً بديعاً في القرن العشرين، لعل أهمها هو نظرية النسبية العامة لأينشتاين.

2- ظهور الدالة المنفصلة وانحياز فكرة التحليل في الرياضيات

إن دراسة الأشكال الهندسية بواسطة الدوال تركزت في الحقيقة على الفرضية التالية، وهي أن قيم الدالة تتابع بدون تقطع أو انفصال كما تتابع نقط المستقيم تتابعاً مطرداً لا فجوة فيه، وهذا هو الاتصال الهندسي.

الدالة function هي قياس متغير بمتغير آخر، وهي صميم الشيء الذي ينصب عليه التحليل الذي ظهر في القرن الثامن عشر.

لكن ظهرت دوال غريبة؛ فقد اكتشف الرياضي الفرنسي أوجستين كوشي (1789- 1857م) أن هناك دوالاً غير متصلة بل منفصلة على عكس الحدس الهندسي، وكذلك دخلت الأعداد التخيلية والأعداد المركبة في الدوال.

واكتشف الرياضي الألماني كارل فيرشراس (1815- 1897م) دالة متصلة لكنها لا تقبل التفاضل، ونجح ريمان في تكوين دالة منفصلة قابلة للتكامل!

هذه الاكتشافات في زمان كان الاتصال شرطاً للاشتقاق (التفاضل) أو التكامل (أدوات التحليل).

كل هذا الابتعاد عن الحدس الهندسي قاد إلى أن يكون التحليل مُتَحَسِّباً، أي يستمد يقينه من علم الحساب الذي مرتكزة العدد، لذا كان اهتمام علماء الرياضيات اللاحقين على العدد وتعريفه كما سنرى مع رسل نفسه.

3- أزمة النهائي واللانهاي في الرياضيات

المالانهاية ليست منفصلة عن الدوال، لأن هذه الأخيرة -كما وضع نيوتن نفسه- ما هي إلا مجموع متسلسلة لا نهائية.

ولعل حساب التفاضل والتكامل واحد من المواضيع المبني على المانهاية، حيث يدرس ضروب الزيادة اللامتناهية في الصغر.

وكان الرياضي كوشي – السابق الذكر – قد وضع الشروط متى يكون لهذه المتسلسلات مجموع أو بلغة الرياضيات، تكون تقاربية، ولعل هذا يذكرنا بمفارقة زينون التي تحدثنا عنها في بداية هذا التقديم.

في القرن التاسع عشر التفت إلى الحساب، وبالتحديد العدد مرة أخرى لدراسة المالانهاية أو بالأصح لترويض المالانهاية على يد عدة علماء منهم التشيكي بولزانو (1781- 1848م) الذي وضح أن سلسلة الأعداد الزوجية غير المنتهية تطابق سلسلة الأعداد الصحيحة غير المنتهية، رغم أن الأولى جزء من الأخيرة، وهكذا وجدنا أنفسنا أمام مفارقة مخالفة لما ألفناه من بديهيات إقليدس، حيث أن الجزء أقل من الكل؛ فهنا صار الجزء مساوياً للكل⁽¹⁾!

(1) وسنرى في مفارقة كانتور أن الجزء يصبح أكبر من الكل!

وجاء العالم الألماني جورج كانتور (1845-1918م) الذي وضع أن الملائحية تبرز في شكلين مختلفين، لانهايات غير تامة كبرى التي تدرس كميات الكبرى التي تقول مهما بلغ ذلك الشيء نهايته الكبرى توجد نهاية أكبر منه وهي اللامتناهية في الكبرى، وبالتالي فهي غير محدودة وكذلك نفس الشيء بالنسبة للمتناهية في الصغر، أما الثانية عبر عنها في دوال من خلال نقاط لامتناهية على مستوى حركة تكون نقاطها غير منتهية.

فكانت نظرية المجموعات أو الفئات Set theory التي تبلورت على يديه، لكنها حملت عدة تناقضات منها مفارقة كانتور نفسه⁽¹⁾، وقد أشار رسل إلى واحدة منها فسميت مفارقة رسل⁽²⁾.

فأضاف أزمة أخرى من أزمة الأسس.

ومع ذلك تكمن أهمية نظرية المجموعات في أنها أكدت على تأسيس الرياضيات كلها - ومنها الهندسة على أساس الأعداد الطبيعية بحيث تشيد الرياضيات كلها على أساس علم الحساب، إلى جانب قيامها بتقسيم سلاسل الأعداد إلى مرتبة وأصلية⁽³⁾، ومن ثم متناهية وغير متناهية، والتي اعتمد عليها رسل نفسه في كتابه (أصول الرياضيات).

الآن أصبحت الرياضيات مشكوكاً في صحتها، مما أدى إلى تعدد الأساق، ومنها نتساءل في إطار أزمة الأسس، من أين تستمد الرياضيات المعاصرة يقينها؟ هل يعود إلى طبيعتها ومنهجها أم إلى عوامل خارجة عنها؟

لأن المنطق هو الأخ التوأم للرياضيات، وهو الذي يجعل الإثبات ممكناً، فقد تم إيقاظه من سباته لما بدأ علماء الرياضيات في البحث عن أصول الرياضيات.

المنطق الرمزي/الحديث

يقوم هذا النوع من المنطق بدراسة العلاقات بين الحدود في قضية ما، والعلاقات المختلفة التي تربط بين عدة قضايا، فهو يمتاز بالرموز في عباراته التي تمنحه الدقة واليقين، وقد اهتم بدراسة العلاقات بين الحدود، لذلك كانت اللوجوستيقا فلسفة علمية حيث بُنيت على أساس رياضي.

إن هذا المنطق الحديث يسمى المنطق الرياضي وهو نفسه المنطق الرمزي، المصطلحات الثلاثة مترادفة، ويمكن أن نضيف إليها مرادفاً رابعاً طرحه في ذلك العام الحاسم ١٩٠٠م لويس كوترا (١٨٦٨-١٩١٤م) لتمييز المنطق الرمزي الحديث عن المنطق الأرسطي التقليدي، وهو مصطلح اللوجسطيقا Logistic .

وتم التوصل إليه خلال عملية البحث عن أصول الرياضيات، التي تميزت إلى ثلاثة اتجاهات وهي:

أولاً: المنطقية

١- جبر المنطق

أحيا الأيرلندي جورج بول (١٨١٥-١٨٧١م) أفكار لينتزر حول اللغة العالمية، وإن كان مخالفاً له؛ إذ أراد بول للمنطق أن يكون علماً رمزياً، والرموز في المنطق الرمزي مثل ثوابت الرياضيات كعلامات الجمع والطرح والقسمة والمساواة والصفر والواحد الصحيح، وكان يستخدم الأحرف الثلاثة الأخيرة من هجاء الإنجليزية وهي X, Y, Z كمتغيرات ونستطيع أن نضع هنا الأحرف "هـ" بدلاً من X، "و" بدلاً من Y، و"ي" بدلاً من Z، وأن بول يرمز بهذه المتغيرات إلى أصناف عند بول بديلة للحدود في المنطق التقليدي.

لقد استفاد بول من أستاذه أغسطس دي مورجان (١٨٠٦-١٨٧١م) الذي خصه بالرعاية والتشجيع.

(1) مفارقة كانتور: تنص نظرية المجموعات على إمكانية تجزئة أي مجموعة ما إلى مجموعات جزئية تكون أكثر عددًا من عناصر تلك المجموعة! مثلاً: مجموعة مكونة من 3 عناصر يمكن تجزئتها إلى 5 مجموعات حسب عدد بيل؛ وهكذا صار الجزء أكبر من الكل!

(2) مفارقة رسل: إن فكرة مجموعة جميع المجموعات توحى بكون المجموعة تتميز بخاصة الانتماء إلى المجموعة كونها هي أيضاً مجموعة، وبالتالي فهي تشمل على نفسها: أما عدم اشتغالها على نفسها فهو التناقض في حد ذاته وسنوضح ذلك بمثال: ومنه إذا قلنا بأنّها تشمل على نفسها أولاً تشمل هنا في كلا الحالتين أمر يؤدي إلى التناقض، لأنّ عكس القضية إذا أدى إلى التناقض أثبت صحة القضية الأولى، وهذه النقيضة التي عرفت منذ زمن عند اليونان بما يُسمى نقيضة الكذاب: إذا قال شخص أنه كذاب، فإن كان صادقاً فهو كذاب وإن كان كاذباً فهو صادق، وكلتا الحالتين هناك تناقض!

(3) سيأتي ذكرها وتعريفها في الكتاب.

كان دي مورجان عالم رياضيات أيضًا معنيًا بتطبيق الأدوات الرياضية على المنطق التقليدي، وفي كتابه (المنطق الصوري) الصادر عام ١٨٤٧م صاغ نظرية العلاقات لأول مرة في صورة رمزية، وعلم بول أن المنطق يمكنه استخدام أساليب الرياضيات، وأن قوانين الجبر يمكن تعميمها بصرف النظر عن تفسيراتها الجزئية، فاستطاع بول أن يصل إلى جبر عام مجرد يتمثل في قوانين الفكر الأساسية، واستبعاد اللغة الجارية كوسيط غير دقيق والتعبير عن هذه القوانين بلغة رمزية دقيقة كلغة الحساب، وإقامة علم المنطق على هذا الأساس.

هكذا تم تأسيس المنطق الرياضي بكتابي جورج بول (التحليل الرياضي للمنطق) عام ١٨٤٧م، و(فحص قوانين الفكر) عام ١٨٥٤م.

نلاحظ أن الأول صدر في نفس عام صدور كتاب أستاذه مورجان، فيمكن اعتبار هذا العام ١٨٤٧م -عام ميلاد المنطق الرياضي الرمزي الحديث.

يقول الدكتور زكي نجيب محمود في كتابه (المنطق الوضعي): "ليست المسألة مجرد استعمال رموز من أحرف الهجاء أو غيرها لتحل محل الحدود والقضايا، وإلا لكانت لعبة صبيان لا طائل وراءها يستحق اهتمامًا، بل إن جوهر المنطق الحديث هو تحويل القضية المنطقية إلى قضية شبيهة بمعادلات الجبر فتكتسب عمليات التفكير ما في الرياضيات من صرامة ودقة وانضباط".

طبّق بول جبره المنطقي على فروع المنطق وموضوعاته، بما في ذلك نظرية القياس الأرسطية، واتضح أنها مجرد حالة لمنطق الفئات.

وهكذا نجد أن المنطق الرياضي يستوعب المنطق التقليدي في سياق أوسع وأرحب، والأهم أنه أدق وأكفأ. إن مسعى جورج بول لا يتمثل في تأكيد أن حقيقة المنطق جبرية رياضية، بقدر ما أراد أن يبين أنه إذا أمكن التعبير عن العمليات الجبرية والمنطقية برمز واحد، فإن تعبيراتهما الرمزية تخضع لقوانين واحدة. جبر بول اليوم يعرفه كل طالب حاسوب تحت مُسمّى الجبر البولياني⁽¹⁾ Boolean algebra.

ب- منطق الرياضيات

هذا الاتجاه المنطقي حاول العكس، فبدلاً من رد المنطق إلى الرياضيات حاولوا العكس، أي رد الرياضيات إلى المنطق بغية تأمين أصولها.

إنه الطريق الذي شقه جوتلوب فريجه (١٨٤٨-١٩٢٥م)، وجوزيب بيانو (١٨٥٨-١٩٣٢م) وواصله ألفرد وايتهيد (1861 - 1947م) وبرتراند رسل (1872 - 1979م) حتى أخرجا كتابهما الفذ برنكيا ماتيماتيك، أي أصول الرياضيات.

وهنا سنعرض لعمل كل من فريجه وبيانو، تاركين أعمال رسل لموضع لاحق.

يعتبر فريجه أول من وضع نظاماً كاملاً للمنطق الرمزي، مستعيناً بأعمال من قبله خاصة مشروع ليبنتز في بناء لغة رمزية، كما يُعد أول من أعطى تعريفاً منطقياً للعدد الأصلي، وأول من صاغ نظرية المجموعات صياغة أولية.

لم يطلب فريجه من المنطق أن يضمن تسلسل البراهين الرياضية فحسب، بل أراد أن يُخرج من كل الرياضيات -أو على الأقل من علم الحساب- كل محتوى غير منطقي؛ لقد حاول في كتابه أسس الحساب أن يشتق علم الحساب من المنطق.

من أهم كتبه (أسس الحساب) عام 1884م، و(القوانين الأساسية للحساب) عام 1893م، و(مباحث منطقية) عام 1916م، أعماله الأولى لم تلفت انتباه أحد لدى صدورها حتى أشار لذلك رسل في كتابه (أصول الرياضيات).

أما بيانو وفيما يختص بدوره في جبر المنطق كان كتابه (صيغة الرياضيات) -Formulaire de Mathématique (1908) أكثر تقدماً من حيث دقة رموزه كما تكشف عن ثوابت لم يعرفها جبر المنطق وأهم من هذا كله أدخل "المتغيرات" variable في كل صيغ المنطق بحيث أصبح المنطق قادراً تماماً على التعبير عن قضايا الرياضة كلها برموزه وحدها.

(1) مثلت لي أعمال رسل في المنطق الخلفية الواضحة لمادة (الهياكل المتقطعة) التي أدرستها لطلافي في جامعة العلوم والتكنولوجيا قسم الحاسوب منذ عدة سنوات؛ حيث وجدت أنني أدرس نتائج جهد رسل وبيانو وفريجه وكننتور وغيرهم دون علمي بالمنطقات التي أوصلت إلى هذه النتائج.

ولعل تأثيره على رسل واضحاً، فقد كان رسل يؤكد أنه أيًا كانت هذه المشكلات الفلسفية، فإن المنطق لا يقدمها لنا؛ إذ إن المنطق يمكنه مساعدتنا في الاستدلال عليها فقط، لكنه غير رأيه عند اطلاعه على أعمال بيانو في مؤتمر باريس عام 1900م.

تلخص هذه الاتجاه عبارة د. يمني طريف الخولي: "ثورة المنطق الرياضي أو ثورة الرياضيات المنطقية مع رسل ووايتهيد اللذين رأيا — بخلاف جبر المنطق مع جورج بول، أي رد المنطق إلى الرياضيات — رأيا أن الرياضيات هي التي تُرد بأكملها إلى المنطق، خاصة بعد تحسب الرياضيات، أي ردها إلى علم الحساب على يد فريجه، ورد علم الحساب إلى مفهوم العدد على يد بيانو، ورد العدد إلى المنطق على يد برتراند رسل، الأمر الذي جعل رسل يعبر عن العلاقة بين المنطق والرياضيات بقوله الشهير إنهما لا يختلفان، إلا كما يختلف الصبي عن الرجل، فالمنطق هو صبا الرياضيات، والرياضيات هي رجولة المنطق".

ثانيًا: الصورية أو الأكسيوماتيكي

يمثله عالم الرياضيات البحتة ديفيد هيلبرت (١٨٦٢-١٩٤٣م) الذي كان يبحث أصول الرياضيات من اتجاه آخر هو الاتجاه الصوري أو الشكلي Formalism ويذهب إلى أن قضايا الرياضيات صيغ متفق على معاني رموزها دون أن يكون لها مدلولات خارجية، بمعنية الاتفاق على قواعد متى راعيناها فقد ضُمَّنا بلوغ اليقين والضرورة. فانصب منظور هيلبرت على المفاهيم والتصورات الرياضية والتحسب الصوري لها على أساس نسق من البديهيات يتوافر فيها الاتساق والكفاية والاستقلال وخصائص الاكتمال الأخرى التي تتحدد في مبحث ما بعد الرياضيات Meta-Mathematics .

ومشروع هيلبرت هو بشكل ما إحياء لمشروع لينتز في القرن السابع عشر، الذي كان يطمح إلى وضع لغة رمزية عالمية يتحد الناس جميعًا في استعمالها بصرف النظر عن لغاتهم الطبيعية، تمامًا كالرياضيات، وتشكل حروفها أبجدية الفكر البشري، فيناظر كل حرف مفهومًا أوليًا بسيطًا، وعن طريق قواعد التركيب نشكل من هذه المفاهيم البسيطة مفاهيم مركبة.

إن تصور هيلبرت للعلاقة بين المنطق والرياضيات، تصور يناقض ما انتهى أصحاب المنطق الرياضي الذين رأوا أن الرياضيات أصلها مشتق من المنطق، فهو يرى أن المنطق والرياضيات خطان متوازيان يمشيان جنبًا لجنب، وبالتالي تنتفي تبعية الرياضيات للمنطق، بل هما مندرجان تحت كلٍّ أكبر منهما هو الأكسيوماتيكي، ولتسوية العلاقة بين المنطق والرياضيات وخلق نوع من الاستقامة بينهما بوصفهما علمين استنباطيين، يجب أن نذهب أكثر من ذلك إلى حد أكبر من المسلمات والحدود التي يقومان عليها والتي مهدها وأسسها لهما ثلة من الفلاسفة والمفكرين على غرار بيانو وفريجه ورسل وغيرهم.

هنا نجد أن الاتجاهين يجمع بينهما المنطق، لذا يمكن جمعهما في اتجاه منطقي واحد لكن برأيين مختلفين حول استخدام هذا المنطق.

ثالثًا: الحدسية

هذا الاتجاه العقلي الحدس المثالي، الذي يرى أن الحدس، أي الإدراك الفوري المباشر هو الطريق لإدراك حقائق الرياضيات وأسسها.

لو راجعنا تاريخ الرياضيات سنجد له جذوراً عند أفلاطون حتى ديكارت وكانط، وتم بعثه مجددًا على يد الهولندي لويثسجن بروور (١٨٨١-١٩٦٦م)، وأيضًا أرند هايتنج (١٨٩٨-١٩٨٠م)، وبوانكاريه (١٨٥٤-١٩١٢م). أنكر الحدسيون أن يكون المنطق قادرًا على تأسيس أصول الرياضيات، وعرضوا قوانين التفكير الأساسية لمنظار النقد، وأثاروا الشك في قانون الثالث المرفوع أو الوسط الممتنع.

يقول هايتنج: "ليس المنطق هو الأساس الذي استند إليه وكيف يجوز ذلك، وهو يحتاج إلى أساس، مبادئه أكثر تعقيدًا وأقل مباشرة من مبادئ الرياضيات نفسه".

رسل وأثره

عاش الفيلسوف برتراند رسل (1872-1970م) في عصر تقلبت فيه الأفكار والمفاهيم كثيرًا، هذه التقلبات لم يكن بعيدًا عنها، بل كان مشاركًا فيها وبقوة، فهو واحد من أشهر فلاسفة القرن العشرين، وخلال هذه الحياة الطويلة نشر الكثير من الكتب والمقالات الرائجة التي حفلت بآراء متنوعة في الأمور الاجتماعية والأخلاقية والسياسية والتعليمية التي جلبت عليه مجموعة متنوعة من ردود الأفعال تراوحت بين أحكام بالسجن وجائزة نوبل! ولكن أعظم ما قدمه هو إسهاماته المدهشة في مجالي المنطق والفلسفة، وهذه الأخيرة أثرى فيها جدا بكتبه التي دون تاريخها.

برع رسل في الرياضيات، وكان تألقه واضحًا، حيث منحت له عام 1890 م منحة دراسية لدراسة الرياضيات في كلية ترينيتي بجامعة كمبريدج، ليحصل على مرتبة الشرف الأولى في الرياضيات سنة 1893م التي درسها ثلاث سنوات لينكب في السنة الرابعة على الفلسفة (كانت تُسمى العلوم الأخلاقية)، وبتأثير من أحد أساتذته أبدى إعجابه بأعمال الفيلسوف الإنجليزي فرانسيس برادلي (1846-1924م) الذي جذبته للمثالية الألمانية المتمثلة في فلسفة كانط وهيكل.

تحولاته الفلسفية

لكن رسل سرعان ما نبذ المثالية الكانطية والهيكلية وذلك عام 1898م يقول:
"لقد حدثت لي عام 1898 عدة أحداث جعلتني أنفضّ عن (كانط) وعن (هيكل) في آن واحد، من ذلك أني قرأت كتاب هيكل (المنطق الأكبر) فكان رأيي فيه عندئذ - ولا يزال هو رأيي اليوم - أن ما قاله هيكل عن الرياضة كلام فارغ خرج من رأس مشوش".
ولكن أكثر من أثر في رسل أشد التأثير كان أحد معاصريه الشباب، وكان ذلك هو جورج مور (1873-1958م)، وقد بدأ كمعتنق للفلسفة الهيكلية شأنه شأن رسل، ولكنه سرعان ما نبذها، وأقنع رسل أن يحذو حذوه، وكان ذلك في نفس الوقت التي كان يلقي محاضرات عن ليبنتز - كما أشرنا سابقا.
في نفس العام الذي أصدر كتابه عن ليبنتز التقى بجوزيب بيانو في المؤتمر العالمي للفلسفة في باريس في يوليو عام ١٩٠٠م، وكان بيانو قد أنجز خطوات فنية في المنطق، فدرسها رسل، ثم بدأ يُحسن المناهج الواردة فيها ويوسعها ويطبّقها أو بعبارة: "ولم أكد أدرس فكرته [أي بيانو] دراسة شاملة حتى رأيته توسع نطاق الدقة التي ألفناها في علوم الرياضيات، بحيث تشمل موضوعات أخرى لبثت حتى ذلك الحين نهجًا للغموض الفلسفي".

عمله في الرياضيات والمنطق

التفت رسل إلى المنطق بسبب أعمال بيانو التي حفزته لاشتقاق الرياضيات من المنطق؛ أي تحليل المفاهيم الرياضية الأساسية إلى مفاهيم منطقية صرفه ومن ثم تقديم نسقا منطقيا محكما يضمن لنا استنباط القضايا الرياضية. لذا كان كتابه الأول (مبادئ الرياضيات أو أصول الرياضيات) - الذي أصدره عام ١٩٠٣م يناقش هذا المشروع- إذ لم يزد عن تقديم وصف مختصر سطحي، في حين يتألف كتاب (أصول الرياضيات أو برنكيا ماتيماتكا) الذي عمل عليه مع وايتهد خلال السنوات (١٩١٠-١٩١٣م) من وصف تفصيلي لمحاولة تنفيذه⁽¹⁾.
وكان من بين أهم الأسباب التي دعت رسل إلى تأجيل المهمة حتى إصدار كتاب (أسس الرياضيات) هو أنه اكتشف وجود تناقض ظاهري؛ مما كان يهدد المشروع بأكمله، وهي مسألة المتناقضات أو المفارقات التي أشرنا إليها في المجموعات.

(1) الكتاب الذي نشره رسل لوحده عام 1903م اسمه (The Principle of Mathematics) وترجمته (مبادئ الرياضيات) وأحيانًا يترجم (أصول الرياضيات)، وهو الكتاب الذي ترجمه د. محمد مرسى أحمد ود. أحمد فؤاد الأهواني عن طبعته الإنجليزية الثانية عام 1937م، وقد صدر الكتاب المترجم بالعربي عام 1961م باسم (أصول الرياضيات).
أما الكتاب الذي كتبه مع ألفرد نورث وايتهد اسمه (Principia Mathematica) برنكيبيا ماتيماتكا وسُمي باللاتينية؛ لأن معناه (أصول الرياضيات) والهدف هو التمييز عن كتاب راسل السابق، ويسميه د. زكي نجيب محمود (أسس الرياضيات).
وعموما هما كتاب واحد لأن الأول الفكرة والثاني التفاصيل.

في كتابه (أصول الرياضيات) يلتحم المنطق مع الرياضيات تمامًا، في إطار نسق موحد يبدأ من حساب القضايا وينتقل إلى حساب الفئات ثم العلاقات، ويتدرج دون أدنى فجوة أو قطع إلى الحساب العددي منتقلًا منه إلى بقية فروع الرياضيات كما نسقها المذهب الحسابي لفريجه في تسلسلها عن العدد الصحيح. نحن هنا لا نستطيع أن نقول أين انتهى المنطق وأين بدأت الرياضيات⁽¹⁾.

أثر كتاب (أصول الرياضيات)

قدم رسل خلال رحلته في كتابه (أصول الرياضيات) نظريتين منطقيتين:

نظرية الأوصاف المنطقية⁽²⁾

قدمها رسل عام 1905م والتي عن طريقها تستطيع الفلسفة — أخيرًا — إثبات أن غولًا أو دائرة مربعة مفاهيم لا وجود لها.

(كل العفاريت حمراء)، و(كل المصريين عرب)، قضيتان متساويتان في نظر المنطق الأرسطي، وعن طريق الأوصاف المنطقية يتم إثبات أن المقدم (المبتدأ أو الموضوع) في القضية الأولى لا وجود له، بينما هو في الثانية موجود، هناك فئة فارغة وفئة غير فارغة.

هدف (الأوصاف المنطقية) هو تمييز الصور المنطقية عن الصور النحوية وإبعاد الكيانات الزائفة التي لا يستطيع النحو إثبات زيفها.

نظرية الأنماط المنطقية⁽³⁾

قدمها رسل عام 1908م للتغلب على التناقضات التي واجهها في نظرية الفئات — كما رأينا سابقًا. في نظرية الأنماط يمكن أن نفرق بين قضية تشير إلى شيء جزئي وقضية تشير إلى مبدأ عام أو تشير إلى قضايا أخرى، مما أدى إلى حل مفارقات كثيرة. الجدي بالذكر أنه أصدر كتاب في ذاك العام اسمه (المنطق الرياضي مستندًا على نظرية الأوصاف) ناقش فكري (البعض) و(الكل) وتدرج الأنماط والمنطق الرياضي والفصول والعلاقات والدلالات الوصفية.

جودول ومبرهنة عدم الاكتمال

هل نجح رسل في مسعاه؟

هل نجح في جعل الرياضيات جزءًا من المنطق؟

في عام 1931م (أي بعد قرابة الـ 20 سنة على إصدار الطبعة الأولى لكتاب مبادئ الرياضيات) تقدّم عالم المنطق والرياضيات التمسائي كورت جودول (1906-1978م) بمبرهنات عدم الاكتمال؛ قدم في مبرهنته الأولى أنه في أي نسق صوري يقوم على سلسلة الأعداد الطبيعية التي تبدأ من الصفر، توجد قضية أو صياغة لا يمكن إثباتها ولا إثبات نفيها، أي غير قابلة للبت أو الحسم صوريًا، وينتج عن هذا مبرهنة جودول الثانية التي تبرهن على أنه لا يمكن إثبات اتساق النسق الصوري ببرهان من داخله، الإثبات الذاتي للاتساق يقتضي توافر خصائص جوهرية لا يتمتع بها النسق الصوري الملائم لسلسلة الأعداد الطبيعية، وهذا يعني لا اكتمالًا في النسق الصوري؛ أي محطّمًا أهداف مشروع رسل ووايتهيد إلى شذرات! مع هذا وحين كتب رسل تمهيدًا لطبعة جديدة في عام ١٩٣٧م، ذكر أنه ظلّ مقتنعًا بصحة الفرضية الأساسية للكتاب؛ وهي "أن الرياضيات والمنطق متطابقان".

(1) لن نعرض تفاصيل فنية، لأن الكتاب يغني عن ذلك.

(2) ستجد تفاصيل مشروحة لهذه النظرية في الفصلين السادس عشر والسابع عشر من الكتاب.

(3) ستجد تفاصيل مشروحة لهذه النظرية في الفصل الثالث عشر من الكتاب.

ومع هذا الإخفاق فإن أهم النتائج التي انتجها كتاب رسل هو التحليلية التي ترى أن أي مشكلة فلسفية إذا خضعت للتدقيق والتحليل الضروريين؛ اتضح أنها إما أن تكون مشكلة منطقية أو أنها ليست مشكلة فلسفية فعلاً، بعبارة أخرى، كل المشاكل الفلسفية فعلاً هي مشاكل منطقية.

لقد قادت التحليلية رسل إلى تطبيقه يلي على الأشياء وطريقة حديثنا عنها. وأطلق على هذا المنهج (فلسفة مذهب الذرية المنطقية).

ويشرح د محمد زكريا توفيق ذلك بقوله:

"لقد كان رسل يعتقد أن العالم مكون من حقائق صغيرة مستقلة لا يمكن تفتيتها، أسماها بالحقائق الذرية (Atomic facts) كلمة ذرة باليونانية تعني الشيء الذي لا يمكن تفتيته إلى أشياء أبسط منه.

أبحاث رسل في المنطق، جعلته يفحص بعناية طريقة استخدامنا للغة. اعتقد رسل أن قواعد اللغة المستخدمة في حياتنا العامة ليست منطقية، ويمكن أن تؤدي إلى عدم فهم وتضليل.

الجملة في لغتنا، لكي تكون مفيدة، يجب أن يكون لها معنى. ولكي يكون لها معنى، يجب أن تماثل أو توافق هذه الحقائق الأساسية، أي الحقائق الذرية. وظيفة الفلسفة هي تحليل هذه الجمل أو المقولات، وتفكيكها إلى جمل بسيطة تطابق حقائق بسيطة. الحقائق البسيطة إما أن تكون صحيحة أو كاذبة .

مثلاً، جملة: "المرأة تنجب 2.6 طفل في المتوسط"، هي جملة مركبة وليست بسيطة. كذلك مفاهيم مثل "الدولة" و"الرأي العام"، هي مفاهيم مركبة وليست بسيطة. نخطئ إذا اعتبرناها أشياء حقيقية موجودة".

وهذا ما نجد صداه في أعمال الفيلسوف النمساوي لودفيج فيتجنشتاين (1889-1951م) الذي كان تلميذاً لرسل ثم صار صديقاً له بعد ذلك.

هذا الكتاب

الكتاب الذي بين أيدينا هو نسخة شعبية من كتاب (أصول الرياضيات)، عرض فيه رسل الأفكار الأساسية لفلسفة الرياضيات، وقد كتبه في السجن!

نعم في السجن؛ فلقد سُجن رسل في بداية عام 1918 لمناهضته الحرب العالمية الأولى، واستمر في سجنه حتى سبتمبر من نفس العام؛ أي ستة أشهر خلالها كتب هذا الكتاب وبداية كتابه (تحليل العقل).

وقد نستغرب أنه أنتج كتاباً في السجن، وتزول الغرابة لو عرفنا أن رسل بفضل علاقاته الاجتماعية (أقرّ متهمكاً أنه من المفيد أن يكون المرء أحياناً لإيرل) وضعوه في الشعبة الأولى من السجن؛ أي إنه كان يقيم في زنزانة مخصصة له وحده، وكان يُسمح له بالاحتفاظ بكتب؛ ومن ثَمَّ كان يقرأ ويكتب.

وقد صدر هذا الكتاب في طبعته الأولى عام 1919م.

يتكون الكتاب من ثمانية عشر فصلاً وتصدير، ابتدأها بالأعداد الطبيعية وتعريف العدد (مستنداً على بيانو ومفنداً له في الوقت نفسه)، وانتقل إلى الاستقراء الرياضي ومن ثم العلاقات (هذه هي الإضافة الجديدة لرسل على من سبقه) مروراً بالترتيب وبعدها يرجع مرة ثانية للأعداد وأنواعها (مستفيداً من كانتور) ويعزّج على الاتصال والنهايات ويقدم في الدوال فكرة الدالة القسوية وعلاقتها بنظريته الأنماط والأوصاف وربطها بالفصول وأخيراً يصل إلى علاقة الرياضيات والمنطق كمسك الختام للكتاب.

يختم رسل كتابه بهذه الجملة المعبرة: "لو قاد هذا الكتاب الصغير أي طالب نحو دراسة جادة للمنطق الرياضي، فسوف يكون قد أدى غرضه الرئيسي الذي كُتب من أجله".

كتاب بذل مترجمه د. أحمد سمير سعد قسارى جهده في توضيح مفاهيمه ونقل مادته بأمانة إلى العربية في سلاسة ويسر رغم الرموز الرياضية التي ملأت الكتاب.

وقد قدم المترجم في نهاية كل فصل تراجم مختصرة لعلماء وفلاسفة الرياضيات الذين أشار لهم المؤلف في متن الكتاب.

إن كتابًا مثل هذا في رف المكتبة العربية هو إضافة مهمة لكل دارس فلسفة أو منطق أو حتى حاسوب ليعرف الجهد الذي بذله علماء الرياضيات والفلسفة للوصول بعصرنا إلى هذا الانفجار المعرفي والمعلوماتي الذي نعيشه اليوم.

عبدالحفيظ العمري

إب – اليمن

12 ديسمبر (كانون الأول) 2019م
